Transformaciones conformes

Una transformación $w=f(z)$ de los puntos de D en puntos de D^* es conforme en $z_0 \in D$ si conserva ángulos entre curvas regulares que se cortan en z_0.

Sea f holomorfa en z_0 y $f'(z_0) \neq 0$ $\quad w_0 = f(z_0)$

$\gamma(t) = x_1(t) + i y_1(t)$, $\gamma(t_0) = z_0$ $\qquad \gamma, \beta$: curvas regulares.

$\beta(t) = x_2(t) + i y_2(t)$, $\beta(t_0) = z_0$

Ángulo entre curvas en z_0: ángulo entre $\gamma'(t_0)$ y $\beta'(t_0)$

$$\boxed{\arg \beta'(t_0) - \arg \gamma'(t_0)}$$

Ángulo entre sus imágenes, en w_0: ángulo entre $[f\circ\gamma]'(t)$ y $[f\circ\beta]'(t)$

$(f\circ\gamma)'(t) = f'(\gamma(t))\cdot\gamma'(t) \qquad (f\circ\beta)'(t) = f'(\beta(t))\cdot\beta'(t)$

$\to \arg (f\circ\beta)'(t_0) - \arg (f\circ\gamma)'(t_0)$

$= \arg f'(\underbrace{\beta(t_0)}_{w_0}) + \arg \beta'(t_0) - [\arg f'(\underbrace{\gamma(t_0)}_{w_0}) + \arg(\gamma'(t_0))] =$

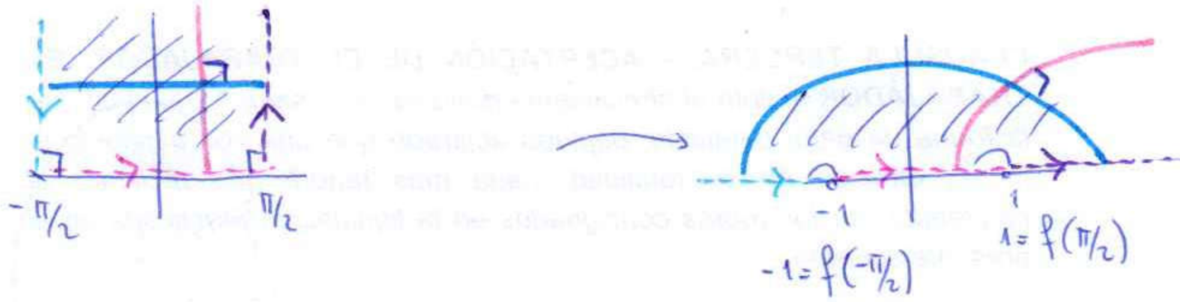
$$\boxed{= \arg \beta'(t_0) - \arg \gamma'(t_0)}$$

Teorema: Si $f: D \to D^*$ es holomorfa en $z_0 \in D$ y $f'(z_0) \neq 0$ $\Rightarrow$ f es conforme en z_0

Ejemplos

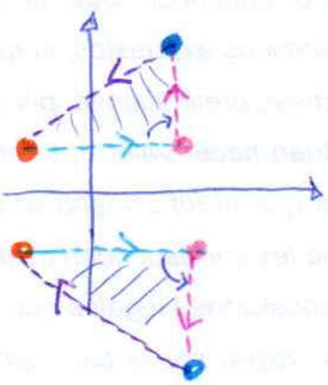
① $f(z) = \operatorname{sen} z$ → holomorfa en $\mathbb{C}$

$f'(z) = \cos z \qquad f'(z) = 0 \iff z = \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$



② Probs. 49, 50

③ $f(z) = \bar{z}$



orientación!

f no es holomorfa

④ $f(z) = x^2 + iy^2$ → no holomorfa

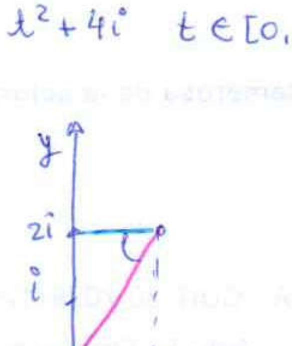
$\gamma(t) = t + 2ti,\ t \in [0,1]$ → segmento entre 0 y $1+2i$

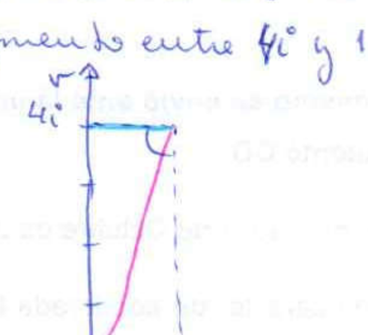
$f(\gamma(t)) = t^2 + i4t^2 \quad t \in [0,1]$ → segmento entre 0 y $1+4i$

$\beta(t) = t + 2i \quad t \in [0,1]$ → segmento entre $2i$ y $2i+1$

$f(\gamma(t)) = t^2 + 4i \quad t \in [0,1]$ → segmento entre $4i$ y $1+4i$

$x = t$
$y = 2t$
$\boxed{y = 2x}$





$u(t) = t^2$
$v(t) = 4t^2$
$\boxed{v = 4u}$

Más aún: $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

Sea f conforme en cada punto de $D \subset \mathbb{C}$.

familias de curvas $x = \text{constante}$ y $y = \text{constante}$ ortogonales en D

se transforman

en familias de curvas ortogonales en $f(D)$

Más: las curvas de nivel de $u(x,y)$ y de $v(x,y)$ son familias de curvas ortogonales.

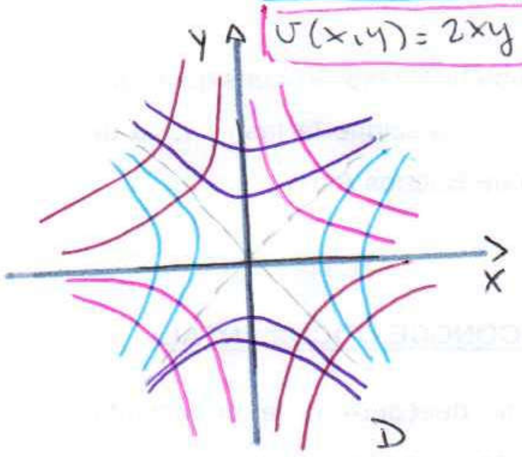
$\mathcal{U}_c = \{(x,y) \in D : u(x,y) = c\} \to$ se transforma en $u = c$

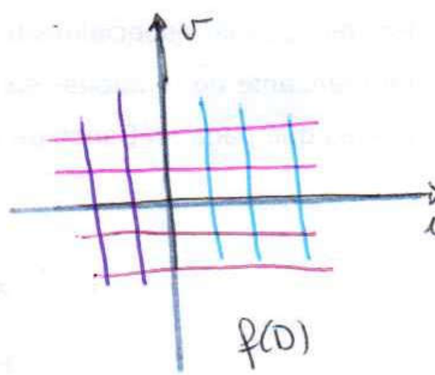
$\mathcal{V}_d = \{(x,y) \in D : v(x,y) = d\} \to$ se transforma en $v = d$

Ejemplo: $f(z) = z^2$

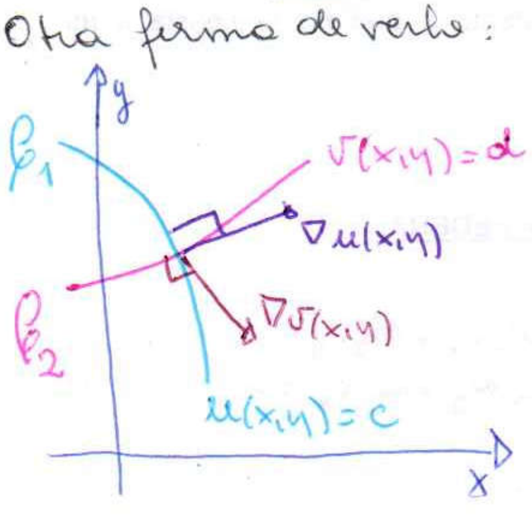
$\boxed{u(x,y) = x^2 - y^2}$

$\boxed{v(x,y) = 2xy}$





Otra forma de verlo:



∇u es ortogonal a $\mathcal{C}_1$ (si $\nabla u \neq (0,0)$)

∇v es ortogonal a $\mathcal{C}_2$ (si $\nabla v \neq (0,0)$)

$$\nabla u \cdot \nabla v = (u'_x, u'_y) \cdot (v'_x, v'_y) =$$

$$= u'_x v'_x + u'_y v'_y =$$

$$= u'_x(-u'_y) + u'_y \cdot u'_x = 0$$

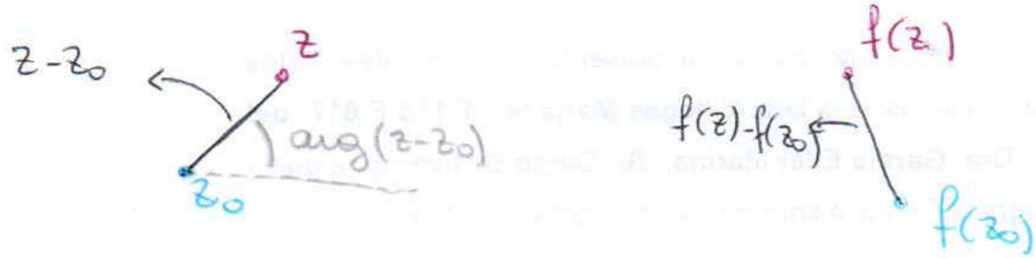
$\Rightarrow \mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son ortogonales.

Y más:

$$|f'(z_0)| = \left|\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| = \lim_{z\to z_0} \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}$$

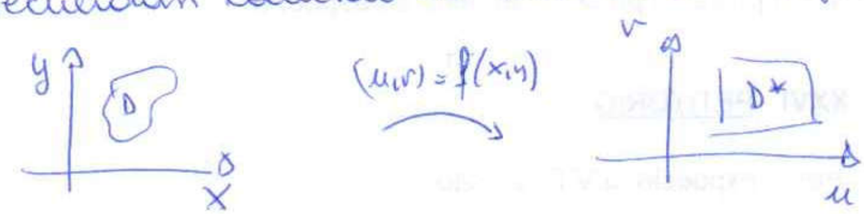
$$\underbrace{|f(z)-f(z_0)|}_{\text{dist. entre imagen de } z \text{ e imagen de } z_0} \approx \underbrace{|f'(z_0)|}_{\text{factor de escala}} \underbrace{|z-z_0|}_{\text{dist. entre } z \text{ y } z_0} \quad \text{si } z \text{ está "cerca" de } z_0$$

↳ si f' es continua, $f'(z)$ se parece a $f'(z_0)$



Es más: $f(z) \approx f'(z_0)(z-z_0) + f(z_0)$

¿Recuerdan cambio de variable en integrales dobles?



$f: D \to D^*$, biyectiva con $|\det Df| = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| \neq 0$

$$\iint_{D^*} \underbrace{du\,dv}_{\text{diferencial de área en } D^*} = \iint_D \underbrace{\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|}_{\text{factor de cambio de área.}} \underbrace{dx\,dy}$$ ↳ diferencial de área en D

Ej 14, TP2: $\boxed{|\det Df(x,y)| = |f'(z)|^2}$

Además:

Una transformación conforme en z_0 tiene inversa local allí.

Inversa local: $f: D \to D^*$

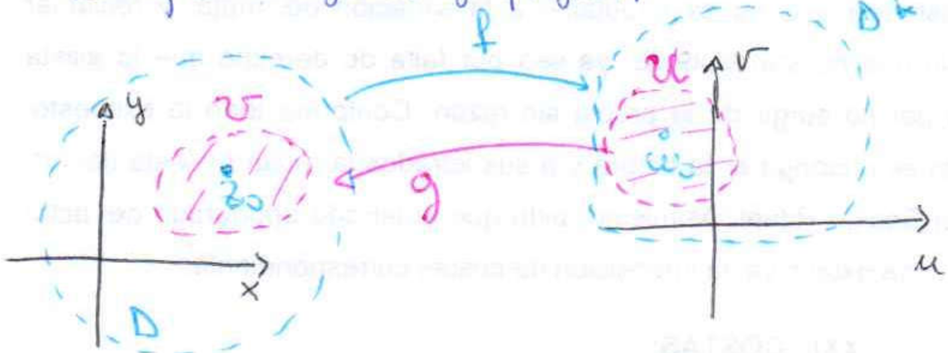
$z_0 \in D$, $w_0 = f(z_0)$.

Una inversa local es $g: \mathcal{U} \to V$ con:

$\mathcal{U}$: entorno de w_0

V: entorno de z_0

tal que $z_0 = g(w_0)$ y $f(g(w)) = w$ en $\mathcal{U}$



Además: $g'(w) = \dfrac{1}{f'(z)}$ $\Rightarrow$ g es conforme en $\mathcal{U}$

Ej: $f(z) = z^2$

$f'(z) = 2z \neq 0$ si $z \neq 0$.

Si $z_0 \neq 0$, existe inversa local: $g(w) = \sqrt{w}$, con $g(w_0) = z_0$